13. Demostrar que $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, si $W_1, W_2$ son subesp. de $V$

Retomamos una línea antes de $\cup W$ en 12.

$gen(W_1 + W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

Tenemos $W_1 \cup W_2 = \{w \in V : w \in W_1 \vee w \in W_2\}$

$\Rightarrow w = \alpha \cdot u \vee w = \beta \cdot v$

Tres casos

① $w = \alpha \cdot u$ ② $w = \beta \cdot v$ ③ $w = \alpha \cdot u = \beta \cdot v$

por lo tanto a $w$ lo generan todos los elementos de $u$ y de $v$, sin embargo si al momento de evaluar $\alpha \cdot u - \beta \cdot v = 0 \rightarrow \alpha = \beta = 0$ $gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$\wedge\ gen(W_1) \cap gen(W_2) = \emptyset$

pero si $\exists\ \alpha_i, \beta_j \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ $gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$\wedge\ gen(W_1) \cap gen(W_2) \neq \emptyset$

En cualquier caso, $gen(W_1 \cup W_2) = gen(W_1) \cup gen(W_2)$

$\rightarrow gen(W_1 + W_2) = gen(W_1 \cup W_2)$

$W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$

14. Determinar una base para cada subespacio de $\mathbb{R}^4$.

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_1) = x_1(1,1,1,1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$

$\therefore F = \langle (1,1,1,1) \rangle$

$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 \wedge x_3 = x_4\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0, 0) + (0, 0, x_3, x_3)$

$= x_1(1,1,0,0) + x_3(0,0,1,1)$ ; $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow G = \langle (1,1,0,0) ; (0,0,1,1) \rangle$

$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = x_3\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_1, x_4) = (x_1, x_1, x_1, 0) + (0,0,0,x_4) = x_1(1,1,1,0) + x_4(0,0,0,1)$ ; $x_1, x_4 \in \mathbb{R}$

$\therefore H = \langle (1,1,1,0) ; (0,0,0,1) \rangle$

$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (-x_4, 0, 0, x_4)$

$= x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$

$x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

$\therefore K = \langle (-1,1,0,0) ; (-1,0,1,0) ; (-1,0,0,1) \rangle$

8. Describa el espacio ~~vectorial~~ generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(1,0,1,-1);(1,-1,0,1);(0,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = \text{gen}(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = \alpha_1(1,0,1,-1) + \alpha_2(1,-1,0,1) + \alpha_3(0,0,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 0 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & v_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & -1 & 0 & v_3 - v_1 \\ 0 & 2 & 0 & v_4 + v_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + v_2 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array}\right]$$

Tenemos que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_1 + 2v_2 + v_4 = 0$.

$\therefore \text{gen}(A) = \{(v_1,v_2,v_3,v_4) : v_1 + v_2 = v_3 \wedge v_1 + 2v_2 + v_4 = 0\}$

$(v_1,v_2,v_3,v_4) = (v_1, v_2, v_1+v_2, -v_1-2v_2) = (v_1, 0, v_1, -v_1) + (0, v_2, v_2, -2v_2)$

$= v_1(1,0,1,-1) + v_2(0,1,1,-2)$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1);(0,1,1,-2) \rangle$

$\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1),(0,1,1,-2) \rangle = \langle (-1,0,-1,1);(0,-1,-1,2) \rangle$


8. Describa el espacio ~~vectorial~~ generado por los conjuntos, determine su dimensión y proporcione dos bases para cada uno de ellos.

a. $A = \{(1,0,1,-1);(1,-1,0,1);(0,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$

Sea $V_1 = \text{gen}(A)$, para todo $v \in V_1$ se tiene que

$$v = \alpha_1(1,0,1,-1) + \alpha_2(1,-1,0,1) + \alpha_3(0,0,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 1 & 0 & 0 & v_3 \\ -1 & 1 & 0 & v_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & -1 & 0 & v_3 - v_1 \\ 0 & 2 & 0 & v_4 + v_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & v_1 + v_2 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 - v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 + v_1 + 2v_2 \end{array}\right]$$

Tenemos que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_1 + 2v_2 + v_4 = 0$.

$\therefore \text{gen}(A) = \{(v_1,v_2,v_3,v_4) : v_1 + v_2 = v_3 \wedge v_1 + 2v_2 + v_4 = 0\}$

$(v_1,v_2,v_3,v_4) = (v_1, v_2, v_1+v_2, -v_1-2v_2) = (v_1, 0, v_1, -v_1) + (0, v_2, v_2, -2v_2)$

$= v_1(1,0,1,-1) + v_2(0,1,1,-2)$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1);(0,1,1,-2) \rangle$

$\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$\text{gen}(A) = \langle (1,0,1,-1),(0,1,1,-2) \rangle = \langle (-1,0,-1,1);(0,-1,-1,2) \rangle$

b. $B = \{1+x; x^3 - x^2\} \subset P_3$

Sea $gen(B)$ el esp vec generado por $B$, para todo $p \in gen(B)$ se tiene que

$$p = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^3 - x^2)$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (+\alpha_2)x^3 + (-\alpha_2)x^2 + (\alpha_1)x + \alpha_1$$

$\rightarrow a_3 = \alpha_2$ | $a_3 = -a_2$

$a_2 = -\alpha_2$ $\rightarrow$ $a_1 = a_0$ $\quad gen(B) = \{p \in P_3 : p = ax^3 - ax^2 + bx + b \ ; a, b \in \mathbb{R}\}$

$a_1 = \alpha_1$

$a_0 = \alpha_1$

Probamos la linealidad de $B$

$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^3 - x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \alpha_1 = 0 \qquad \therefore B$ es L.I.

$\alpha_2 x^3 - \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_1 = 0 \qquad B$ es base de $gen(B)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -1 \\ -1 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} -1 \\ +1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad \therefore \dim(gen(B)) = 2$$

$$gen(B) = \langle x^3 - x^2 ; 1+x \rangle = \langle x^2 - x^3 , -1-x \rangle$$

8. Si $\beta = \{u, v, w\} \subset V$, es un conjunto L.I., determinar la D.L. o I.L. de $\beta = \{\alpha u + \beta v, \lambda v - \alpha w, \beta w + \lambda v\}$, para $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $a_1 u + a_2 v + a_3 w = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Queremos probar $b_1(\alpha u + \beta v) + b_2(\lambda v - \alpha w) + b_3(\beta w + \lambda v) = 0 \rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 0$ $\quad \exists b_i \neq 0, i = 1,2,3$

$$\rightarrow b_1 \alpha u + (b_1\beta + b_2\lambda + b_3\lambda)v + (b_3\beta - b_2\alpha)w = 0$$

$$a_1 u + a_2 v + a_3 w = 0$$

$b_1\alpha = 0 \ \wedge \ b_1\beta + b_2\lambda + b_3\lambda = 0 \ \wedge \ b_3\beta - b_2\alpha = 0$

$(\alpha = 0 \vee b_1 = 0) \ \wedge \ \alpha b_1\beta + \alpha b_2\lambda + \alpha b_3\lambda = 0 \quad \beta b_3 = \alpha b_2$

$\beta b_3\lambda + \alpha b_3\lambda = 0$

$(\lambda b_3 = 0 \vee \alpha + \beta = 0)$

Suponemos $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow b_1 = 0 \quad$ Si $b_3 = 0 \longrightarrow b_2 = 0 \qquad \therefore$ Existe el caso donde $b_2 \neq 0 \vee b_3 \neq 0$

Si $\alpha = -\beta \longrightarrow b_2 + b_3 = 0$

Rpta: Si $\alpha = -\beta$, $B$ es L.D.

Si $\alpha \neq -\beta$, $B$ es L.I.

10.5: $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$ es L.I. Determinar la linealidad de

$A = \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$

Sabemos $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$

Probamos $\beta_1 v_1 + \beta_2 (v_2 - v_1) + \dots + \beta_m (v_m - v_1) = 0$

$(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots - \beta_m) v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m = 0$

$\rightarrow \left(\beta_1 - \sum_{i=2}^{m} \beta_i\right) = 0 \quad \wedge \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_m = 0 \qquad \therefore \beta_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$

$\beta_1 = \sum_{i=2}^{m} \beta_i = \sum_{i=2}^{m} 0 = 0$

Rpta: A es L.I.

23. Demostrar que:

a. $\langle (1,3,5) \rangle = \langle (2,6,10) \rangle$

Sean los ~~subespacios~~ conjuntos $A = \{(1,3,5)\}$ y $B = \{(2,6,10)\}$ y los subespacios gen(A) y gen(B).

$\rightarrow$ gen$(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha(1,3,5),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ y gen$(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta(2,6,10),\ \beta \in \mathbb{R}\}$

$y = (2\beta)(1,3,5)$

$2\beta$ sigue siendo $\mathbb{R}$

$\forall x \in$ gen(A) $\wedge$ $y \in$ gen(B) : $x = \alpha(1,3,5) = y = (2\beta)(1,3,5)$

$x = y$ pues solo es necesario que $\alpha = 2\beta$

$\rightarrow$ gen(A) = gen(B)

$\langle (1,3,5) \rangle = \langle (2,6,10) \rangle$

b. $\langle (2,-1,6); (-3,4,1) \rangle = \langle (-1,3,7); (8,-4,24) \rangle$

Sean $A = \{(2,-1,6); (-3,4,1)\}$, $B = \{(-1,3,7); (8,-4,24)\}$ y gen(A), gen(B) sus subespacios.

gen$(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1) = x;\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$, gen$(B) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \beta_1(-1,3,7) + \beta_2(8,-4,24)\}$

En gen(B),

$y = \beta_1(-1,3,7) + 4\beta_2(2,-1,6)$

$y = \beta_1(-1,3,7) + (4\beta_2 + \beta_1)(2,-1,6) - \beta_1(2,-1,6)$

$y = \beta_1(-3,4,1) + (4\beta_2 + \beta_1)(2,-1,6)$

$x = \alpha_1(2,-1,6) + \alpha_2(-3,4,1)$

Haciendo $\alpha_2 = \beta_1 \wedge \alpha_1 = 4\beta_2 + \beta_1$ por lo tanto habrían $x$ e $y$ iguales $\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ gen(A) = gen(B) $\Leftrightarrow$ $\langle (2,-1,6), (-3,4,1) \rangle = \langle (-1,3,7), (8,-4,24) \rangle$